Серия: Инвариантные интегралы

Тематика публикации: Применение инвариантных интегралов в физике и механике

Книга Г.П.Черепанова «Механика разрушения горных пород в процессе бурения» (1987) посвящена решению научных и прикладных задач разрушения горных пород долотами, резцами, струями, лазерными и электронными лучами, а также задач устойчивости скважин и откосов, распространения сдвиговых изломов земной коры при землетрясениях, износа долоти пр. Для решения этих задач привлекаются представления механики разрушения и специальные интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Эти интегралы впервые были введены автором в механике разрушения и названы им инвариантными или Г-интегралами.

Книга начинается с общефизической главы «Основы механики разрушения», а ее первый параграф «Инвариантные Г-интегралы» посвящен изложению основного метода исследования. В нем автором представлены инвариантные Г-интегралы гравитационного и электромагнитного полей, неравновесной термодинамики, газодинамики, а также линейной и нелинейной упругости. Показано, что из этих интегралов единым методом вытекают, в частности, классические уравнения Ньютона, Максвелла, Навье-Стокса, уравнения неравновесной термодинамики, газовой динамики и теории упругости , а также классические формулы Жуковского-Чаплыгина, Ирвина, Пича-Келера и др.

Первый параграф и представляется вашему вниманию в специально подготовленном файле этой публикации. Кроме него,

в файле также приведены все выходные данные книга, общее оглавление, введение и список литературы.
При подготовке этой электронной публикации автором исправлены замеченные опечатки издания 1987 года.

Размещение этого файла в библиотечных сетях, на сайтах библиотек и частных лиц разрешается только с согласия автора.

Электронный ресурс http://vmkiso.narod.ru/allgint.htm

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В ПРОЦЕССЕ БУРЕНИЯ

МОСКВА "НЕДРА" 1987

УДК 622.24.026.3

Черепанов Г. П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. — М.: Недра, 1987, 308 с.

Кратко изложены основы механики разрушения горных пород, вопросы деформации трещиноватых тел. Приведена расчетная схема усталостно-коррозионного износа долота. Рассмотрены различные режимы бурения и выбор оптимального режима. Большое внимание уделено разрушению пород ударными и режущими инструментами, высоконапорными фильтрационными потоками. Изложены вопросы устойчивости стенок глубоких скважин и результаты экспериментального и теоретического исследования разрушения горных пород интенсивными пучками электронов высокой энергии, пучками фотонов и элементарных частиц. Освещена проблема прочности горных пород и, в частности, вопрос о поверхности разрушения и постулате Драккера.

Для научных работников, занимающихся вопросами механики разрушения горных пород и исследованием прочности горных пород и выработок.

Табл. 7, ил. 78, список лит. — 50 назв.

Рецензент: *Л. В. Ершов,* д-р техн. наук (Московский горный институт)

Ч $\frac{2504030300-225}{043(01)-87}$ КБ—61—19—86.

ВВЕДЕНИЕ

Разрушение горных пород бурением — основной способ разработки полезных ископаемых. Это в первую очередь относится к глубокому бурению на нефть и газ и к бурению взрывных скважин при открытом способе добычи. Сюда же могут быть отнесены проходческие работы при устройстве горных выработок, а также буровые работы при сооружении зданий, дорог и т. п.

В большинстве случаев, особенно при бурении глубоких скважин, исследователи, технологи и конструкторы не имеют возможности наблюдать и изучать разрушение породы непосредстенно на забое. Средства телеметрии, испольуемые при работе породоразрушающего инструмента, развиты весьма слабо. Поэтому развитие теоретических и лабораторных работ по механике разрушения горных пород приобретает особое значение. Лабораторное моделирование процессов разрушения пород затруднительно вследствие необходимости создания высоких термодинамических параметров залегания, трудности или невозможности получения образцов пород достаточно крупных размеров и принципиальной невозможности воспроизведения крупномасштабных разрушений. Кроме труднодоступности для непосредственного изучения, горные породы в условиях естественного залегания представляют собой неповторяющиеся объекты, и поэтому теория разрушения в некоторых случаях служит единственным методом исследования. Теоретический подход должен давать вначале качественное объяснение основных характеристик натурных наблюдений.

Таким теоретическим подходом обладает механика разрушения. Традиционная механика горных пород, построенная на «бесструктурных» теориях, не учитывающих явно их дефектность и трещиноватость — основные структурные характеристики породы, не может объяснить явления разрушения горных пород различного масштаба. Например, хорошо известна опасность перенесения лабораторных данных о деформации и разрушении керновых образцов (без искусственных трещин) на натуру большего масштаба.

Механика разрушения горных пород не противоречит механике горных пород, а, наоборот, является ее обобщением и развитием.

Однако такое обобщение требует применения тонких математических методов для решения сложных существенно неодномерных краевых задач. Отсюда вытекает необходимость использования современного математического аппарата и вычислительной техники. Натурные наблюдения помогают исследователю, владеющему математическими методами, выбрать достаточно простую и адекватную постановку задачи, а также оценить правильность ее решения.

Остановимся кратко на общих гипотезах однородности и изотропии, типичных для механики сплошных сред и применяемых также в настоящей работе. Правильное понимание и применение этих гипотез тесно связано с основным понятием механики сплошной среды — понятием элементарного объема. Для различных масштабов изучаемых явлений понятия элементарного объема, однородности и изотропии имеют разный физический смысл. Тело, однородное и изотропное в одном масштабе, не обязательно однородно и изотропно в других масштабах. Величина элементарного объема для явлений большего масштаба будет значительно превышать величину элементарного объема для явлений меньшего масштаба, хотя в математической теории она будет бесконечно малой величиной.

Гипотезы однородности и изотропии позволяют существенно упростить процессы вычисления и быстрее приходить к более простым результатам. Поэтому в методологических целях эти гипотезы приняты в этой книге почти везде; в случаях конструктивной анизотропии приведен метод вычисления характеристик анизотропии.

Другое существенное предположение — это допущение о линейно-упругой реакции элементарного объема горной породы на внешние возмущения. Справедливость этого допущения основана на учете величины характерных внутренних напряжений для явлений разных масштабов. Из механики разрушения, в частности, вытекает вывод об уменьшении прочности горных пород с увеличением масштаба явления. Например, если прочность некоторого образца породы размером 10^2 см равна 10^2 МПа, то в микромасштабе прочность той же породы может быть на порядок выше, а в бо́льших масштабах — на один-два порядка ниже. Таким образом, с увеличением масштаба явления критические напряжения, а следовательно, и характерные внутренние напряжения убывают, в результате чего гипотеза линейно-упругой реакции становится все более адекватной. То же можно сказать о начальных напряжениях геологического происхождения в горной породе: измерения обнаружили во многих прочных горных породах типа кварцитов, песчаников и других начальные внутризеренные напряжения порядка нескольких сотен мегапаскалей (как сжимающие, так и растягивающие). Начальные тектонические напряжения в окрестности буровых скважин могут в несколько раз превышать вертикальное горное давление. Оба вида напряжений с учетом реологических свойств горных пород с течением времени должны быть значительно меньше прочности этих пород в соответствующих масштабах.

Трещиноватость и пористость — важнейшие структурные характеристики горных пород, существенно влияющие на их физические и механические свойства. В зависимости от уровня трещиноватости и пористости прочность одной и той же горной породы изменяется в сотни раз. Разрушение при взрыве происходит в основном по поверхности естественной трещиноватости. Упругие и деформационные показатели горного массива также заметно зависят от уровня трещиноватости и пористости. С развитием пористости и трещиноватости проницаемость горной породы может измениться в тысячи раз. Кроме того, трещиноватость влияет на акустические, оптические, термические, электрические и другие свойства горных пород. Поэтому в современных теоретических исследованиях физических процессов, протекающих в горных породах, учет пористости и трещиноватости приобретает существенное значение. Особенно это относится к разнообразным процессам разрушения горных пород.

В механике разрушения (как точной теоретической дисциплине) под трещиной понимается поверхность разрыва смещений. Практически такими поверхностями разрыва смещений в соответствующих условиях с учетом масштаба рассматриваемых феноменов являются такие физически и геометрически разнохарактерные объекты, как микротрещины, естественные трещины (часто с заполнителем), дизъюнктивные нарушения, тектонические трещины, слои пластичных глин или рыхлых песков, слои угля, подземные выработки, узкие ущелья, рифтовые впадины в земной коре, разломы или системы разломов в литосфере и т. д.

Можно выделить семь основных масштабов трещиноватости и нарушенности структуры горных пород (см. гл. 1).

Микротрещины с характерным линейным размером порядка 10^{-9}—10^{-2} м сравнимы или меньше характерного размера отдельных зерен или монокристаллов, составляющих горную породу. Таков же характерный размер естественных пор в горных породах. Трещины и искусственные выработки с характерным линейным размером порядка 10^{-1}—10^{2} м велики по сравнению с характерным размером отдельных зерен микроструктуры. Тектонические трещины и геологические нарушения структуры с характерным линейным размером порядка 10^{1}—10^{4} м сравнимы или превышают характерный размер искусственных выработок и сооружений (или естественных откосов и каньонов), но малы по сравнению с толщиной твердой оболочки Земли (литосферы). Материковые трещины и разломы с характерным линейным размером до 10^{7} м сравнимы или даже значительно больше толщины литосферы (толщина литосферы составляет от 10 до 80 км под океанами и 200—300 км на континентах).

Предложенная классификация весьма удобна, так как она позволяет при теоретическом анализе различных процессов разрушения горных пород в рамках механики сплошных сред выделить наиболее существенные масштабы нарушенности и трещиноватости, управляющие конкретным процессом, а разрывами в остальных масштабах пренебречь.

Буровая скважина имеет характерный диаметр 0,1—1 м, а длину порядка 10^1—10^4 м. Поэтому различные масштабы трещиноватости и нарушения структуры существенны при изучении процесса строительства скважин, включающего углубление и сохранение целостности стенок скважины как сооружения.

Пористость и трещиноватость в масштабе 10^{-3}—10^{-2} м важны при исследовании процессов разрушения забоя; искусственные и геологические нарушения структуры в масштабах 10^1—10^4 м обусловливают, в частности, распределение локального горного давления в окрестности скважины, устойчивость ее стенок, различные нарушения нормального технологического процесса бурения.

Приведем другие процессы и явления, физической основой которых является постепенное или быстрое развитие трещин различных масштабов: дробление и размельчение мелких фракций горной породы в различных технологических процессах добычи полезных ископаемых, пылеобразование, выветривание, эрозия (микротрещины); дробление горной породы взрывом, разрушение забоя скважины и керновых образцов в лабораторных условиях, горные удары и выбросы, обвалы (трещины); крупные обвалы каньонов и откосов, землетрясения (тектонические трещины); глобальные землетрясения, образование месторождений многих цветных металлов — гидроинтрузия вдоль трещин из глубины Земли (материковые трещины и разломы).

Очевидно, что построение научной теории указанных явлений должно основываться на изучении законов развития соответствующих им трещин и пор, что позволит выделить основные внешние факторы, влияющие на это развитие, и лучше понять сопутствующие им процессы.

Изучением развития трещин и дефектов различных масштабов в горных породах занимается механика разрушения горных пород. По методам исследований она близка к механике разрушения твердого тела, по объектам исследований — к геофизическим наукам, изучающим горные породы, по направленности исследований — к горному и буровому делу.

Механика разрушения горных пород базируется на уже накопленном другими науками запасе знаний о физико-механических свойствах горных пород и о строении горного массива. Однако следует подчеркнуть, что она имеет свое собственное экспериментальное направление, без развития которого невозможен прогресс этой науки.

Основой этого направления являются лабораторные опыты и натурные испытания по развитию трещин и других дефектов в различных условиях в зависимости от характера и величины внешних нагрузок, вида породы, формы образца, типа дефекта, температуры и т. д. На начальном этапе изучения особый интерес представляют лабораторные эксперименты на образцах с искусственными трещинами или дефектами, моделирующими исследуемую систему.

Теоретические исследования в области механики разрушения горных пород позволяют:

выявить основные закономерности развития трещин и других дефектов;

определить влияние дефектов на основные физико-механические свойства горной породы в сравнимых масштабах;

указать специфические для разрушения константы материала и разработать принципиальные схемы их определения в опытах;

моделировать явления разрушения разных масштабов и, таким образом, подойти к оценке явлений разрушения в микро- и макромасштабах;

выявить наиболее важные внешние факторы, влияющие на процесс разрушения, и научиться прогнозировать это явление и целенаправленно управлять им, изменяя искусственно эти факторы.

Предлагаемая читателю книга — попытка краткого систематизированного изложения основных представлений механики разрушения горных пород применительно в основном к процессам бурения. Цель ее — стимулировать дальнейшее развитие теоретических и экспериментальных исследований в этой новой области.

Книга полностью основана на разработках автора и его учеников.

В обсуждении ряда вопросов, изложенных в книге, принимали участие И. А. Амирасланов, А. Х. Бараов, А. А. Борзых, Г. И. Быковцев, А. С. Быковцев, М. И. Ворожцов, М. Л. Вильямс, Л. Н. Германович, Р. В. Гольштейн, Ю. П. Гупало, Л. А. Кипнис, Р. С. Кочаров, Л. В. Никитин, В. С. Никифоровский, В. А. Пинскер, О. В. Соткилава, Е. И. Шемякин.

Автор считает своим долгом выразить свою благодарность всем указанным лицам.

Особенно признателен автор Р. М. Эйгелесу за его помощь при работе над книгой.

Глава 1

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Механика разрушения изучает развитие неоднородностей и дефектов структуры материала типа трещин, дислокаций, пор, включений и т. п. Развитие таких дефектов приводит вначале к необратимым деформациям материала, затем к локальному разрушению, т. е. к образованию некоторых пустот или полостей, и, наконец, к разделению целого куска материала на отдельные части. Предмет изучения механики разрушения — все сплошные материалы, начиная от жидкостей и биоматериалов (например, сердечных тканей) и кончая горными породами и конструкционными материалами.

Теоретическая основа механики разрушения — аппарат инвариантных Г-интегралов, представляющих собой инвариантную формулировку основных физических законов сохранения в виде интегралов по контуру или поверхности, независимую от пути интегрирования.

§ 1. ИНВАРИАНТНЫЕ Г-ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим в пространстве $Ox_1x_2x_3$ некоторый объем V, ограниченный поверхностью Σ. Предположим, что эта поверхность остается неподвижной в пространстве $Ox_1x_2x_3$ и сплошная среда (материал) свободно проходит через нее. Пусть $F(x_1, x_2, x_3, t)$ — некоторая физическая характеристика этого объема V, подчиняющаяся закону сохранения (t — время). Такой характеристикой может быть количество движения, энергия, заряд, масса, момент количества движения (в случае вектора или тензора под F будем понимать любую составляющую этого вектора или тензора).

Изменение величины F внутри V слагается из конвективной части (получаемой за счет разности между количеством F, вносимого в V, и количеством F, выносимого из V) и нестационарной части (получаемой за счет изменения F внутри V с течением времени).

Конвективная часть получается интегрированием по поверхности Σ:

$$\int_{\Sigma} F v_i n_i d\Sigma \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

где v_1, v_2 v_3 — составляющие вектора скорости среды в системе координат Ox_1, x_2, x_3 (по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование, например, $v_i n_i = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$); n_1, n_2 n_3 — составляющие единичного вектора внешней нормали к поверхности Σ.

Выражение (1.1) представляет собой поток величины F через поверхность Σ.

Нестационарная часть получается интегрированием по объему V изменения F:

$$\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial t} dV. \tag{1.2}$$

Поэтому закон сохранения F запишется так:

$$\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int\limits_\Sigma F v_i n_i d\Sigma = 0. \tag{1.3}$$

Согласно теореме Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_\Sigma A n_i d\Sigma = \int\limits_V A_{,i} dV. \tag{1.4}$$

Здесь и далее запятой с последующим индексом обозначается частная производная по соответствующей координате (т. е. $A_{,i} = \partial A/\partial x_i$, где A — произвольная дифференцируемая функция).

Обычно применяют теорему Гаусса — Остроградского ко второму слагаемому уравнения (1.3) и получают

$$\int\limits_V \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (F v_i)_{,i}\right] dV = 0. \tag{1.5}$$

Отсюда в силу произвольности объема V приходят к локальной записи закона сохранения в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F v_i)_{,i} = 0. \tag{1.6}$$

Недостатком (1.6), как и других дифференциальных уравнений математической физики, является то, что они теряют смысл в особых точках, а также на особых линиях и поверхностях физического поля, где переменные физического поля терпят разрыв и производные не имеют смысла. Между тем исследование особенностей (сингулярностей) физического поля представляет основной интерес для теории и ее приложений. Образно говоря, особенности физического поля, вытекающие из решений согласно данной теории, характеризуют саму теорию, ее достоинства, недостатки, принципиальные возможности практических приложений, пределы применимости и т. п. Поэтому важно иметь также другую формулировку определяющих уравнений математической физики, справедливую и в регулярных и в сингулярных точках поля. Такую формулировку дают инвариантные Г-интегралы.

Обратимся к (1.2) и введем функцию (потенциал) $\Pi(x_1\ x_2, x_3, t)$:

$$(\Pi v_i)_{,i} = -\partial F/\partial t. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в закон сохранения (1.3) и применяя теорему Гаусса — Остроградского (1.4), получаем

$$\int_{\Sigma} (F - \Pi) v_i n_i d\Sigma = 0. \tag{1.8}$$

Это уравнение справедливо для произвольной поверхности Σ в физическом поле, если область V не содержит сингулярностей поля. Интеграл в левой части уравнения (1.8) инвариантен относительно поверхности Σ; он называется инвариантным Г-интегралом.

Очевидно, в области V без сингулярностей уравнение (1.8) эквивалентно уравнению (1.6), т. е. из уравнения (1.8) выводится уравнение (1.6) и наоборот. В этом случае имеем просто две различные математические формулировки одного и того же физического закона.

Если же решение в области V разрывно[1], то поле имеет сингулярность в области V. Сингулярность можно окружить замкнутой поверхностью $\Delta\Sigma$, содержащей внутри себя бесконечно малый объем ΔV; в оставшейся области $V - \Delta V$ по-прежнему справедливо уравнение (1.8).

Обозначим

$$\Gamma(t) = \lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta\Sigma} (F - \Pi) v_i n_i d\Sigma. \tag{1.9}$$

Этот интеграл вычисляется по основному правилу Г-интегрирования [37, 31] — правилу конечной части расходящегося интеграла.

Величина $\Gamma(t)$ должна быть ограниченной согласно физическому смыслу законов сохранения; это дополнительное требование, которому должна удовлетворять физически корректная теория или модель. Если сингулярная точка движется со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$, то выражение (1.9) для $\Gamma(t)$ запишется так:

$$\Gamma(t) = \lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta\Sigma} (F - \Pi)(v_i - V_i) n_i d\Sigma. \tag{1.10}$$

В системе координат, движущейся вместе с сингулярной точкой, $V_1 = V_2 = V_3 = 0$. В этом случае деформируем контур $\Delta\Sigma$ в Σ, используя свойство инвариантности Г-интегралов. В резуль-

[1] Разрыв функции бывает первого и второго рода (функция ограничена и не ограничена соответственно в сингулярной точке).

тате вместо (1.8) получим

$$\int_{\Sigma} (F - \Pi) v_i n_i d\Sigma = \Gamma(t). \qquad (1.11)$$

Это уравнение заменяет (1.8) или (1.6) и представляет собой математическую формулировку закона сохранения величины F в области V с сингулярностью. Сингулярность поглощает или генерирует величину F с интенсивностью $\Gamma(t)$.

В случае нескольких сингулярных точек, движущихся с различными скоростями $(V_{k_1}, V_{k_2}, V_{k_3})$ область V разбивается на соответствующее число подобластей, в каждой из которых закон сохранения запишется так:

$$\int_{\Sigma_k} (F - \Pi)(v_i - V_{k_i}) n_i d\Sigma = \Gamma_k(t). \qquad (1.12)$$

На общих границах подобластей должны выполняться соответствующие условия непрерывности.

Аналогично можно рассмотреть случаи сингулярной линии или сингулярной поверхности. Особенно прост стационарный случай, когда $\partial F/\partial t = 0$ и потенциал Π можно принять равным нулю.

Впервые инвариантные интегралы появились еще в классическом трактате Максвелла при определении тензора напряжений электромагнитного поля. В статической теории упругости аналогичные интегралы, используя метод Максвелла, ввел в 1951 г. Эшелби [40], который фактически использовал их лишь для вычисления конфигурационной силы, действующей на упругую неоднородность в форме эллипсоида (таким образом он моделировал «атом внедрения» в твердом растворе).

Принятый в настоящей работе подход, основанный на физических законах сохранения, был предложен автором в 1967 г. при выводе основного энергетического Г-интеграла для произвольных твердых тел с учетом динамики и объемных сил (J-интеграл Эшелби получается из него как некоторый частный случай). Этот интеграл, равный потоку энергии в конец движущейся трещины, был введен автором в качестве основного критериального параметра разрушения твердых тел. В книгах [30, 31, 37] и других дается дальнейшее развитие этого подхода. В 1968 г. Райс применил J-интеграл для расчета концентрации напряжений и деформаций вблизи выточек и щелей, а в 1972 г. Ландес и Бегли использовали этот интеграл для формулировки критерия разрушения (предложенная ими константа J_c в другом обозначении была введена автором на пять лет раньше). История этого вопроса изложена, например, в статье Вильямса [50].

Применим изложенный выше подход к основным классическим теориям полей математической физики.

Гравитационное поле. Пусть гравитационное поле определяется потенциалом $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющим некоторому закону сохранения, записанному при помощи инвариантных Г-интегралов следующим образом:

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi_{,i}n_k - \varphi_{,i}\varphi_{,k}n_i\right)d\Sigma = 4\pi f\Gamma_k \ (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \quad (1.13)$$

где f — гравитационная постоянная. Здесь Γ_k равны нулю, если в области V внутри Σ отсутствуют источники гравитационного поля (гравитационные массы). Величины $\Gamma_k \neq 0$, если гравитационная масса внутри Σ отлична от нуля.

Покажем, что такая формулировка ньютоновской теории тяготения эквивалентна традиционной. Преобразуем (1.13) с помощью теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int_\Sigma \left(+\frac{1}{2}\varphi_{,i}\varphi_{,i}n_k - \varphi_{,i}\varphi_{,k}n_i\right)d\Sigma =$$

$$=\int_V \left[+\frac{1}{2}(\varphi_{,i}\varphi_{,i})_{,k} - (\varphi_{,i}\varphi_{,k})_{,i}\right]dV = \int_V (\varphi_{,ik}\varphi_{,i} - \varphi_{,i}\varphi_{,ki} -$$

$$-\varphi_{,ii}\varphi_{,k})\,dV = -\int_V \varphi_{,ii}\varphi_{,k}dV = 0 \text{ при } \Gamma_k = 0. \quad (1.14)$$

Так как область V произвольна, то отсюда вытекает, что в вакууме потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\varphi_{,ii}=0$, т. е. является гармонической функцией.

Пусть в начале координат находится некоторый точечный источник гравитационного поля. Простейшее сингулярное в начале координат решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\varphi = -f\frac{M}{r} - g_k x_k \ (r^2 = x_i x_i), \quad (1.15)$$

где M и g_k — некоторые постоянные.

Дифференцируя (1.15) по координатам x_i любое число раз, можно получить весь спектр решений уравнения Лапласа с единственной сингулярной точкой в начале координат.

Пусть поверхность Σ охватывает сингулярную точку (начало координат). Вычислим величины Γ_k с помощью (1.13) и (1.15). Найдем

$$-\varphi_{,k} = g_k + fMx_k/r^3. \quad (1.16)$$

Пользуясь инвариантностью Г-интеграла, в качестве Σ возьмем узкий параллелепипед с гранями $x_1 = \pm L$; $x_2 = \pm L$; $x_3 = \pm\delta$; $\delta/L \to 0$; $L \to 0$. Находим

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2\pi f}\lim_{\delta/L\to 0}\int_{-L}^{+L}\int_{-L}^{+L}(\varphi_{,1}\varphi_{,3})|_{x_3=\delta}dx_1dx_2. \quad (1.17)$$

С помощью основного правила Г-интегрирования на основании (1.16) получаем

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2\pi f} \lim_{\substack{L\to 0\\ \delta/L\to 0}} \int\limits_{-L}^{+L}\int\limits_{-L}^{+L} \left(g_1 \frac{fM}{r^3}\delta + g_2 \frac{fM}{r^3} x_1 \right) dx_1 dx_2 =$$

$$\frac{g_1 M}{2\pi} \lim_{\substack{l\to 0\\ \delta/l\to 1}} \int\limits_{-L}^{+L}\int\limits_{-L}^{+L} \frac{\delta dx_1 dx_2}{(x_1^2+x_2^2+\delta^2)^{3/2}} = \frac{g_1 M}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt_1 dt_2}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/2}}.$$

Преобразуем двойной интеграл в цилиндрических координатах R и φ($R^2=t_1^2+t_2^2$, $dt_1dt_2=Rd\varphi dR$), при этом имеем

$$\Gamma_1 = \frac{g_1 M}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{RdR}{(1+R^2)^{3/2}} = g_1 M \frac{1}{2} \int\limits_1^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^{3/2}} = g_1 M. \quad (1.18)$$

Аналогично вычисляя Γ_2 и Γ_3, получаем

$$\Gamma_k = M g_k \ (k=1,\ 2,\ 3). \quad (1.19)$$

Гравитационное поле в вакууме может обладать лишь энергией, поэтому величина Γ_k в правой части (1.13) представляет собой диссипацию энергии поля при перемещении сингулярной точки вдоль оси x_k на единицу длины. Следовательно, к материальной точке, являющейся источником сингулярного возмущения, приложена сила (Γ_1, Γ_2, Γ_3); величину M можно считать массой материальной точки при определенном выборе f. При этом, согласно (1.16), величина g_k будет напряженностью невозмущенного гравитационного поля ($g_k=-\varphi_{,k}$), а формула (1.19) дает обоснование физического формализма с «пробной» единичной точечной массой. Для непрерывного распределения массы из (1.19) получается уравнение Пуассона для потенциала φ.

Таким образом, нерелятивистскую теорию тяготения можно строго сформулировать в виде уравнения (1.13) с помощью инвариантных Г-интегралов. При этом с точки зрения закона сохранения энергии член $\frac{1}{2} f^{-1}\varphi_{,i}\varphi_{,i}$ представляет собой потенциальную энергию гравитационного поля в единице объема пространства, а член $f^{-1}\varphi_{,i}\varphi_{,k}$ — работу напряжений гравитационного поля на единице длины пути. С точки зрения закона сохранения количества движения эти члены можно трактовать также как величину удельного импульса и тензор напряжений гравитационного поля соответственно.

Аналогичный подход возможен при построении релятивистской полевой теории тяготения (эйнштейновская теория тяготения является чисто геометрической, поэтому введение инвариантных Г-интегралов в ее рамках затруднительно).

Электромагнитное поле. Рассмотрим стационарное электромагнитное поле в среде с нулевой проводимостью без учета ее деформаций. Уравнения поля можно задать в виде инвариантных Г-интегралов

$$\int_\Sigma (Wn_k - D_i n_i E_k - H_k B_i n_i)\, d\Sigma = \Gamma_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.20}$$

и уравнений состояния

$$H_i = \partial U/\partial B_i;\ E_i = \partial U/\partial D_i;\ U = U(D_i,\ B_i). \tag{1.21}$$

Здесь $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ — векторы поля; U — потенциальная энергия поля в единице объема.

Процесс предполагается обратимым. Величины Γ_k равны нулю, если внутри Σ нет сингулярностей поля. При наличии сингулярностей вектор (Γ_1, Γ_2, Γ_3) дает суммарную силу, действующую на эти сингулярности со стороны поля. Функция $W = W(E_i,\ H_i)$ определяется так:

$$W(E_i,\ H_i) = U(D_i,\ B_i) + E_i D_i + H_i B_i \tag{1.22}$$

и, следовательно,

$$D_i = \partial W/\partial E_i;\ B_i = \partial W/\partial H_i. \tag{1.23}$$

Покажем, что при $\Gamma_k = 0$ из инвариантных интегралов (1.20) вытекают уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла).

Преобразуем (1.20):

$$\int_\Sigma (Wn_k - D_i n_i E_k - H_k B_i n_i)\, d\Sigma = \int_V [W_{,k} - (E_k D_i)_{,i} - (H_k B_i)_{,i}]\, dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial W}{\partial E_i} E_{i,k} + \frac{\partial W}{\partial H_i} H_{i,k} - E_k D_{i,i} - E_{k,i} D_i - \right.$$

$$\left. - H_k B_{i,i} - H_{k,i} B_i \right] dV = \int_V [D_i (E_{i,k} - E_{k,i}) + B_i (H_{i,k} - H_{k,i}) -$$

$$- E_k D_{i,i} - H_k B_{i,i}]\, dV = 0,$$

отсюда в силу произвольности V вытекают следующие уравнения:

$$E_{i,k} = E_{k,i};\ H_{i,k} = H_{k,i};\ D_{i,i} = 0;\ B_{i,i} = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0;\ \operatorname{rot} \vec{H} = 0;\ \operatorname{div} \vec{D} = 0;\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{1.24}$$

Это уравнения Максвелла в рассматриваемом стационарном случае.

В частности, для электростатического поля в изотропном линейном диэлектрике, когда $\vec{H} = 0$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость, согласно (1.20)

$$\varepsilon \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} E_i E_i n_k - E_i n_i E_k \right) d\Sigma = \Gamma_k \tag{1.25}$$

$$(E_i = -\varphi_{,i};\ \varphi_{,ii} = 0).$$

Из (1.25) можно вывести все свойства электростатического поля (например, закон Кулона).

В работе [37] были найдены инвариантные Г-интегралы нестационарного электромагнитного поля с учетом деформаций среды.

Слабонеравновесные термодинамические поля. Рассмотрим слабонеравновесное стационарное термодинамическое поле, в котором приращение энтропии dS можно представить в виде суммы

$$dS = X_i dQ_i \ (i = 1, 2, 3), \tag{1.26}$$

где X_i и Q_i — соответственно составляющие векторов обобщенных термодинамических силы и потока.

Примером такого поля может служить стационарное температурное поле или поле диффузии. В этом случае энтропия любого заданного объема стационарна, если в нем нет источников диссипации энергии. Этот закон сохранения можно записать так:

$$\int\limits_{\Sigma} (S n_k - X_i n_i Q_k)\, d\Sigma = \Gamma_k. \tag{1.27}$$

Здесь $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ — вектор потока энтропии, производимой всеми источниками энтропии в области V внутри Σ.

При $\Gamma_k = 0$, преобразуя (1.27), находим

$$\int\limits_{\Sigma} (S n_k - X_i n_i Q_k)\, d\Sigma = \int\limits_{V} [S_{,k} - (X_i Q_k)_{,i}]\, dV =$$

$$= \int\limits_{V} \left[\frac{dS}{\partial Q_i} Q_{i,k} - X_{i,i} Q_k - X_i Q_{k,i} \right] dV =$$

$$= \int\limits_{V} [X_i (Q_{i,k} - Q_{k,i}) - X_{i,i} Q_k]\, dV = 0.$$

Отсюда получаем

$$X_{i,i} = 0;\ Q_{i,k} = Q_{k,i}. \tag{1.28}$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{Q} = 0;\ Q_i = \varphi_{,i}, \tag{1.29}$$

где φ — некоторый потенциал.

В случае линейного закона

$$X_i = A_{ij} Q_j, \tag{1.30}$$

где коэффициенты A_{ij} должны удовлетворять принципу симметрии Онзагера $A_{ij}=A_{ji}$.

Согласно (1.28) и (1.29) отсюда получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет потенциал стационарного слабонеравновесного векторного термодинамического поля при отсутствии источников энтропии:

$$(A_{ij}\varphi_{,j})_{,i}=0. \tag{1.31}$$

Аналогично можно рассмотреть тензорные поля.

Газовая динамика. Рассмотрим безвихревое стационарное изоэнтропическое течение невязкого сжимаемого газа. В этом случае систему уравнений газовой динамики можно записать в виде следующих инвариантных Г-интегралов:

$$\int_\Sigma \rho v_i n_i d\Sigma=0;\ \int_\Sigma (\rho v_k v_i n_i+pn_k)\,d\Sigma=\Gamma_k$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3);\ p/p_\infty=(\rho/\rho_\infty)^\varkappa. \tag{1.32}$$

Здесь ρ, v_i, p — соответственно плотность, скорость и давление газа; p_∞, ρ_∞ — давление и плотность невозмущенного потока; $\varkappa$ — отношение теплоемкостей

Первое уравнение (1.32) представляет собой закон сохранения массы, второе можно трактовать двояко, как закон сохранения импульса (за единицу времени) и как закон сохранения энергии (в расчете на единицу длины пути). Соответственно величины Γ_k можно трактовать как составляющие равнодействующей всех сил, приложенных к сингулярностям поля внутри Σ, и как диссипацию энергии поля на внутренних сингулярностях при продвижении их на единицу длины в направлении оси x_k. Величины Γ_k равны нулю, если внутри Σ нет сингулярных точек, линий и поверхностей разрыва. Третье уравнение (1.32) — это условие локальной адиабатичности процесса.

Система (1.32) эквивалентна системе дифференциальных уравнений газовой динамики, получающихся из (1.32) применением теоремы Гаусса — Остроградского. Некоторые общие свойства течений газа при помощи уравнений (1.32) получаются элементарно.

Пусть, например, некоторое тело конечных размеров движется в покоящемся газе, причем вихри и ударные волны отсутствуют. В этом случае в потоке нет источников диссипации энергии и контур Σ в (1.32) с поверхности тела можно удалить в бесконечность, где возмущенное течение будет бесконечно слабым и его порядок легко оценить методом малых возмущений $\Delta\rho\sim O(R^{-2})$; $\Delta v_i\sim O(R^{-2})$; $\Delta p\sim O(R^{-2})$, где R — расстояние от тела. Из второго уравнения (1.32) вытекает, что в рассматриваемом случае $\Gamma_k=0$ (аналог парадокса Даламбера — Эйлера).

Если один из размеров тела бесконечен (цилиндрическое или призматическое тело), то ситуация изменяется. В этом случае, обозначая

$$u_1 = v_\infty(1+\overline{u}_1);\ u_2 = v_\infty\overline{u}_2;$$
$$p = p_\infty(1+\overline{p});\ \rho = \rho_\infty(1+\overline{\rho}); \tag{1.33}$$
$$(\overline{u}_i \ll 1;\ \overline{p} \ll 1;\ \overline{\rho} \ll 1),$$

преобразуем (1.32) с учетом (1.33) к следующему виду (для плоской задачи):

$$\oint (\overline{u}_2 n_1 - \overline{u}_1 n_2)\, d\Sigma = 0;\ \oint (\overline{u}_i n_i - M_\infty^2 \overline{u}_1 n_1)\, d\Sigma = 0 \tag{1.34}$$
$$(\overline{v}_\infty = -M_\infty^2 \overline{u}_1;\ \overline{p} = \varkappa\overline{\rho};\ c_\infty^2 = \varkappa p_\infty/\rho_\infty;\ i = 1,\ 2),$$

где M_∞ — число Маха на бесконечности; v_∞ — скорость невозмущенного потока относительно тела, совпадающая по направлению с осью x_1; c — скорость звука.

Система (1.34) эквивалентна системе дифференциальных уравнений газовой динамики в линеаризованной теории. Последняя справедлива для произвольной формы тела на достаточном удалении от него, а для достаточно тонких тел — во всей области течения. Ее решение выражается через комплексный потенциал $W(z)$ следующим образом:

$$\overline{u}_1 = \mathrm{Re}\, W'(z);\ \overline{u}_2 = -\sqrt{1 - M_\infty^2}\, \mathrm{Im}\, W'(z)$$
$$\left(z = x_1 + ix_2\sqrt{1 - M_\infty^2}\right). \tag{1.35}$$

При $z \to \infty$ в общем случае имеется следующее разложение $W'(z) = Cz^{-1} + O(z^{-2})$, где C — некоторая постоянная. Анализ решения Cz^{-1} показывает, что действительной величине C соответствует наличие источника или стока газа интенсивности $\mathrm{Re}\, C$ в сингулярной точке $z=0$ (которой описывается произвольное тело при $z\to\infty$), а мнимой величине C — существование вихря (циркуляции) на бесконечности с интенсивностью $\mathrm{Im}\, C$. Воспользовавшись инвариантностью Г-интеграла, стянем Σ в бесконечность и найденное решение подставим во второе уравнение (1.32), при этом легко получим

$$\Gamma_1 = 2\pi\rho_\infty v_\infty^2 \mathrm{Re}\, C;\quad \Gamma_2 = 2\pi\rho_\infty v_\infty^2 \mathrm{Im}\, C \tag{1.36}$$

Второе уравнение (1.36) представляет собой содержание известной теоремы Жуковского—Чаплыгина о подъемной силе, доказанной ими для несжимаемой жидкости. Эта теорема — теоретическая основа не только авиации, но и всевозможных гидродинамических решеток, используемых в турбинах и гидромашинах (в частности, в гидравлических турбобурах, применяемых для бурения скважин).

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ и на основании (1.32) в поле течения справедлив интеграл Бернулли $p + \frac{1}{2}\rho v_i v_i =$

$=\mathrm{const}$. Подставляя отсюда p во второе уравнение (1.32), получаем

$$\Gamma_k = \rho \int\limits_{\Sigma} \left(-\frac{1}{2} v_l v_l n_k + v_l n_l v_k \right) d\Sigma \tag{1.37}$$

$$(v_i = \varphi_{,i};\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Вязкая жидкость. Рассмотрим стационарный поток вязкой несжимаемой жидкости. В этом случае законы сохранения массы и импульса можно записать так:

$$\int\limits_{\Sigma} v_i n_i d\Sigma = 0;\ \int\limits_{\Sigma} (\rho v_l n_l v_k - \sigma_{kl} n_l)\, d\Sigma = \Gamma_k; \tag{1.38}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})$$

$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3;\ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j;\ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j).$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений; μ — динамическая вязкость жидкости. Вектор $(\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)$ представляет собой равнодействующую всех внешних сил, приложенных к инородным телам, которые находятся внутри Σ, а выражения (1.38) для σ_{ij} — уравнения состояния. Уравнения Навье — Стокса получаются из (1.38) применением теоремы Гаусса — Остроградского.

При малых числах Рейнольдса, когда инерционными членами можно пренебречь, уравнения (1.38) упрощаются:

$$\int\limits_{\Sigma} v_i n_i d\Sigma = 0;\ -\int\limits_{\Sigma} \sigma_{kl} n_l d\Sigma = \Gamma_k. \tag{1.39}$$

Упругое тело. Рассмотрим статическую упругую среду при малых деформациях. В этом случае уравнения равновесия и закон сохранения энергии можно записать в виде следующих инвариантных Г-интегралов [30, 37]:

$$\int\limits_{\Sigma} \sigma_{kl} n_l d\Sigma = P_k; \tag{1.40}$$

$$\int\limits_{\Sigma} (U n_k - \sigma_{ij} u_{i,k} n_j)\, d\Sigma = \Gamma_k \tag{1.41}$$

$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Здесь U, σ_{ij}, u_i — соответственно упругий потенциал единицы объема, напряжения и перемещения.

Физический смысл P_k и Γ_k в данном случае будет различен. Вектор $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ равен равнодействующей внешних сил, приложенных к упругому телу в области V внутри Σ. Величины Γ_1, Γ_2, Γ_3 равны изменению упругой энергии системы, происходящей вследствие перемещения на единицу длины вдоль осей x_1, x_2 и x_3 соответственно сингулярных точек, линий или поверхностей в области V внутри Σ. Сингулярными точками могут быть: точки приложения сосредоточенных сил и моментов, инородные упругие тела относительно малых размеров (например, атомы внедрения), полости и поры относительно малых размеров и т. п. Сингулярные линии — это контур трещин, дислокаций, линейных сосредоточенных сил и т. п. Сингулярные поверхности — это поверхности раздела различных упругих сред, свободная граничная поверхность (например, поверхность полости или трещины) и т. п.

Уравнения (1.41) не содержат в себе каких-либо дополнительных физических допущений; они так же строги, как и уравнения равновесия (1.40). Величины P_k и Γ_k имеют размерность силы. Поэтому мы иногда будем называть величины Γ_k конфигурационными или движущими силами. На самом деле, физически они проявляют себя в форме диссипации энергии (т. е. в основном в виде рассеивающегося тепла и в меньшей степени в виде скрытой энергии остаточных напряжений), однако лишь в том случае, если соответствующее перемещение сингулярности произошло на самом деле.

На контуре трещины, распространяющейся вдоль касательной плоскости к предыдущей полости трещины, величины Γ_1, Γ_2, Γ_3 связаны с коэффициентами интенсивности напряжений [30, 37]

$$\Gamma_1 = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{\rm I}^2 + K_{\rm II}^2) + \frac{1}{2\mu}K_{\rm III}^2; \qquad (1.42)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1-\nu}{\mu}K_{\rm I}K_{\rm II}; \ \Gamma_3 = 0.$$

Здесь μ — модуль сдвига; $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$, $K_{\rm III}$ — коэффициенты интенсивности напряжений σ_{22}, σ_{12} и σ_{23}:

$$K_{\rm I} = \lim(\sigma_{22}\sqrt{2\pi x_1}); \quad K_{\rm II} = \lim(\sigma_{12}\sqrt{2\pi x_1});$$

$$K_{\rm III} = \lim(\sigma_{23}\sqrt{2\pi x_1}) \text{ при } x_1 \to 0;$$

x_1 — расстояние от кромки трещины в касательной плоскости x_1x_3 на продолжении трещины; при этом x_2 — нормаль к плоскости x_1x_3; μ — модуль сдвига.

Силой, движущей трещину, будет Γ_1. Такой результат при $K_{\rm II}=K_{\rm III}=0$ был впервые получен Ирвином, поэтому в этом случае силу Γ_1 называют силой Ирвина.

При $\Gamma_k=0$, $P_k=0$ формулировка теории упругости в виде инвариантных Г-интегралов (1.40) и (1.41) эквивалентна традиционной формулировке теории упругости в виде дифференциальных уравнений. Действительно, на основании теоремы Гаусса — Остроградского из (1.40) и (1.41) можно найти

$$\sigma_{ij,j} = 0; \ U_{,k} = (\sigma_{ij}u_{i,k})_{,j} = \sigma_{ij,j}u_{i,k} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,jk} + u_{j,ik}),$$

откуда

$$\sigma_{ij,j} = 0; \ \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Это обычные уравнения теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авершин С. Г., Мосинец В. Н., Черепанов Г. П.* О природе горного удара в выработках. ДАН СССР, т. 204, № 3, 1972, с. 569—571.
2. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. Киев, Наукова Думка, 1982.
3. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев, Наукова Думка, 1979.
4. *Введение* в механику скальных пород / Д. Х. Троллоп, Х. Бок, Б. С. Бест и др. М., Мир, 1983.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Наука, 1976.
6. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев, Наукова Думка, 1983.
7. *Ершов Л. В.*, Максимов В. А. Введение в механику горных пород. М., Недра, 1976.
8. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. М., Наука, 1978.
9. *Каминский А. А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев, Наукова Думка, 1982.
10. *Костров Б. В.* Механика очага тектонического землетрясения. М., Наука, 1975.
11. *Леонов М. Я.* Механика деформаций и разрушения. Фрунзе, Илим, 1981.
12. *Марков А. Б.* Инженерно-геологические особенности тектонитов. Душанбе, Дониш, 1977.
13. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М., Наука, 1980.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1978.
15. *Никифоровский В. С., Шемякин Е. И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск, Наука, 1979.
16. *Николаевский В. Н.* Механика деформаций и разрушения горных пород. М., Недра, 1984.
17. *Новая* глобальная тектоника. М., Мир, 1974.
18. *Панасюк В. В.* Предльное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, Наукова Думка, 1968.
19. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М., Наука, 1985.
20. *Петухов И. М., Линьков А. М.* Механика горных ударов и выбросов. М., Недра, 1983.
21. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977.
22. *Проблемы* разломной тектоники. Новосибирск, Наука, 1981.
23. *Работнов Ю. Н.* Механика твердого деформируемого тела. М., Наука, 1979.
24. *Разрушение.* Энцикл. изд. под ред. Г. М. Либовица. М., Мир, 1973—1976. Т. 1—7.
25. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, Наукова Думка, 1981.
26. *Садовский М. А.* Естественная кусковатость горной породы. ДАН СССР, т. 247, № 4, 1979, с. 769—772.
27. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., Наука, 1976, Т. 1—2.
28. *Спивак А. И.* Разрушение горных пород при бурении скважин. М., Недра, 1979.
29. *Тектонические* разрывы на участках сейсмического микрорайонирования. М., Наука, 1982.
30. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974.

31. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М., Наука, 1983.
32. *Черепанов Г. П., Аннин Б. Д.* Упругопластическая задача. Новосибирск, Наука, 1983.
33. *Черепанов Г. П., Ершов Л. В.* Механика разрушения. М., Машиностроение, 1977.
34. *Advances* in Fracture Research. Proceedings of the Sixth International Congress on Frasture (New Delhi, India), Cambridge University Press, 1984.
35. *Aki K., Richards P. G.* Quantitative Seismology. Theory and Methods. San Francisco, Freeman and Co., 1980.
36. *Attewell P. B., Farmer I. W.* Principles of Engineering Geology. London, Chapman and Hall, 1976.
37. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. New York, Mc Graw Hill, 1979.
38. *Dislocations* in Solids. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1979.
39. *Dynamic* Crack Propagation Leyden, Noordhoff Intern. Publication, 1974.
40. *Eshelby J. D.* The force on an elastic singularity. Phil. Trans. Roy. Soc., A 244, 1951, pp. 87—111.
41. *Farmer I. W.* Engineering Behavior of Rocks. London, Chapman and Hall, 1983.
42. *Fundamentals* of Deformation and Fracture. Proceedings of the Eshelby Memorial Symposium, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
43. *Griffith A. A.* The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., A221, 1920, pp. 165—198.
44. *Irwin G. R.* Fracture. In: Handbuch der Physik, B. VI (Flugge, ed.), Berlin, Springer — Verlag, 1958, pp. 551—590.
45. *Jaeger J. C., Cook N. G. W.* Fundamentals of Rock Mechanics. London, Chapman and Hall, 1977.
46. *Maurer W. C.* Advanced Drilling Techniques. Tulusa, Petroleum Publishing Co., 1980.
47. *Mechanics* of Solids. Oxford, Pergamon Press, 1982.
48. *Prospects* of Fracture Mechanics. Leyden, Noordhoff Publishing Co., 1975.
49. *Rice J. R.* The mechanics of earthquake rupture. In: Physics of the Earth's Interior. Italian Physical Society, 1980, pp. 559—649.
50. *Williams M. L.* On the mathematical criterion for fracture. In: Thin — Shell Structures. New Jersey, Prentice — Hall, 1974, pp. 467—482.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. **Основы механики разрушения** 8

§ 1. Инвариантные Γ-интегралы 8
§ 2. Движение дислокаций и трещин. Пластичность и ползучесть поликристаллических твердых тел 20
§ 3. Точечные дефекты типа включений 22
§ 4. Точечные дефекты типа дырок 29
§ 5. Классификация масштабов трещиноватости горных пород. Пилообразная структура трещин 37
§ 6. Развитие трещин сдвига в горных породах 41
§ 7. Конфигурационные силы в механике твердого тела . . 48
§ 8. Теория бурения в точечном приближении 65
§ 9. Теория усталостно-коррозионного износа долот . . . 70
§ 10. Закритические деформации твердых материалов . . . 75

Глава 2. **Теория прочности горных пород** 79

§ 1. Основные допущения 80
§ 2. Эллиптическое включение 83
§ 3. Анализ точного решения 90
§ 4. Выделение промежуточной асимптотики 96
§ 5. Тонкие включения произвольной формы 101
§ 6. Изгиб плоскости с эллиптическим включением 102
§ 7. Основные механизмы локального разрушения. Диаграммы разрушения 104
§ 8. Поверхность разрушения и постулат Друккера 115

Глава 3. **Системы трещин скольжения** 120

§ 1. Трещины скольжения 120
§ 2. Формула Петча — Стро — Коттрелла 123
§ 3. Сведение к системе сингулярных интегральных уравнений 128
§ 4. Периодическая прямоугольная решетка трещин 132
§ 5. Двоякопериодическая прямоугольная решетка трещин . 136
§ 6. Двоякопериодическая шахматная решетка трещин . . . 138
§ 7. Метод решения линеаризованных задач 141
§ 8. Метод решения нелинейной сингулярной системы уравнений 145
§ 9. Трещины скольжения вдоль одной и той же прямой (нелинейная задача) 148
§ 10. Точные решения для продольного сдвига 150
§ 11. Коэффициенты интенсивности напряжений 152
§ 12. Эффективные упругие константы тела с трещинами скольжения 156

Глава 4. **Резание горных пород** 162

§ 1. Основные экспериментальные результаты 163
§ 2. Колебания при резании 165
§ 3. Математическая модель резания 172
§ 4. Контактная задача теории упругости для клина . . . 178
§ 5. Симметричное вдавливание жесткого штампа в клиновидную область 191
§ 6. Контактное взаимодействие двух клиновидных упругих тел из различных материалов с учетом трения 196

Глава 5. **Теория гидроэрозии** 206

§ 1. Постановка задачи 207

§ 2. Размывание грунта под плотиной 208
§ 3. Задача о разрушении забоя скважины 212
§ 4. Изолированный пузырь в кипящем слое 213
§ 5. Изолированная полость в полосе 215
§ 6. Математический метод решения задач гидроэрозии для полигонального контура 220
§ 7. Узкие длинные каверны 221
§ 8. Плоский аналог задачи о грифоне 230
§ 9. Осесимметричная задача о грифоне 232

Глава 6. **Устойчивость стенок глубоких скважин** 241

§ 1. Локальная неустойчивость стенок круглой скважины . . 241
§ 2. Постановка задачи о равновесных формах упругих тел . 244
§ 3. Решение краевой задачи в классе ограниченных потенциалов 246
§ 4. Решение краевой задачи в классе неограниченных потенциалов 249
§ 5. Предельная глубина скважины 252
§ 6. Напряженное состояние породы в окрестности забоя скважины 254

Глава 7. **Разрушение под действием пучков элементарных частиц** 258

§ 1. Разрушение твердых тел мощными релятивистскими электронными пучками. Анализ экспериментальных и теоретических исследований 259
§ 2. Основные задачи теории электронного разрушения твердых тел 269
§ 3. Эффекты самоуплотнения в релятивистских электронных пучках в среде 278
§ 4. Стационарное сверхзвуковое движение бесконечного тонкого клина 283
§ 5. Торможение конечного клина в квазистационарном приближении 289
§ 6. Образование сгустков электронной плазмы в кристаллах (сравнительный анализ результатов теории и эксперимента) . 292
§ 7. Кинжальное проплавление горных пород 296
Список литературы 305

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Геннадий Петрович Черепанов

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В ПРОЦЕССЕ БУРЕНИЯ

Редактор издательства *А. И. Ровинская*
Переплет художника *А. Е. Григорьева*
Художественный редактор *В. В. Шутько*
Технические редакторы *А. В. Трофимов, Н. В. Жидкова*
Корректор *Г. Н. Петушкова*

ИБ № 4969

Сдано в набор 31.07.86. Подписано в печать 11.02.87. Т-01638
Формат 60×90 1/16 Бумага типографская № 1 Гарнитура Литературная
Усл.-печ. л. 19,5 Усл. кр.-отт. 19,5 Уч.-изд. л. 18,0
Тираж 1900 экз. Заказ 5255/8934—4 Цена 3 руб.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,
129047, Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
113054, Москва, Валовая, 28.