УДК 531.45

ТЕОРИЯ КАЧЕНИЯ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КУЛОНА

Г. П. Черепанов

Нью-Йоркская академия наук, Нью-Йорк, США
E-mail: genacherepanov@hotmail.com

Предложена теория качения круглых тел в нормальном режиме, когда на всей площадке контакта выполняются условия сцепления. Эта теория уточняет классическую теорию качения Кулона, согласно которой момент качения прямо пропорционален прижимающей силе (например, весу катящегося тела). Установлено, что момент качения цилиндров прямо пропорционален прижимающей силе в степени 3/2, а момент качения шаров и торов — прижимающей силе в степени 4/3. Показано, что нормальный режим равномерного качения можно реализовать лишь при определенном соотношении упругих постоянных материалов круглого тела и основания, образующих идеальную пару. Проблема Кулона решена для случаев качения упругого цилиндра по упругому полупространству; упругого шара по упругому полупространству; упругого тора по упругому полупространству; цилиндра и шара по туго натянутой мембране. Для этих случаев выведен закон качения и вычислены коэффициенты трения качения, момент качения и сила трения качения.

Ключевые слова: теория качения, проблема Кулона, закон качения, момент качения, коэффициент трения качения, нормальный режим качения.

1. Постановка задач. Согласно классическому закону качения Кулона момент качения круглых тел с постоянной поступательной скоростью равен

$$M = TR = kN. \tag{1.1}$$

Здесь R — радиус круглого тела (цилиндра, колеса, шара, тора); T — сила тяги, приложенная к центру круглого тела и равная равнодействующей сил трения на площадке контакта; N — нормальная прижимающая сила (например, вес тела), приложенная к центру круглого тела; k — коэффициент трения качения, который считается некоторой постоянной материалов круглого тела и основания. Экспериментальное определение этого коэффициента — одна из основных проблем трибологии.

В работе [1] закон Кулона был уточнен, там же показано, что в нормальном режиме качения коэффициент трения качения упругих круглых тел является не материальной константой, а следующей функцией основных параметров:

— для колес и цилиндров

$$k = \eta_W (NRP)^{1/2}; \tag{1.2}$$

— для шаров

$$k = \eta_B (NRP)^{1/3}. \tag{1.3}$$

Здесь η_W, η_B — безразмерные коэффициенты качения цилиндров (колес) и шаров; P — упругая податливость системы круглое тело — основание. В случае цилиндров и колес N — прижимающая сила, приходящаяся на единицу длины цилиндра (ширины колеса).

Как показано в работе [1], в нормальном режиме качения упругих тел по упругому основанию, когда на площадке контакта имеют место условия сцепления, величина k равна половине характерного размера площадки контакта. Таким образом, решение соответствующей контактной задачи позволяет с помощью (1.2), (1.3) вычислить безразмерные коэффициенты η_B, η_W и тем самым найти решение известной проблемы Кулона.

Ниже проблема Кулона решена для случаев качения упругого цилиндра по упругому полупространству; упругого шара по упругому полупространству; упругого тора по упругому полупространству; цилиндра и шара по туго натянутой мембране.

2. Качение упругого цилиндра. Пусть два упругих цилиндра радиусом R_1 и R_2, изготовленные из различных материалов, контактируют друг с другом в условиях плоской деформации, причем ширина площадки контакта $2a$ значительно меньше R_1 и R_2. Пусть также $R_2 > R_1$. Изучим качение с постоянной скоростью цилиндра радиусом R_1 по цилиндру радиусом R_2. Граничные условия соответствующей контактной плоской задачи теории упругости формулируются следующим образом:

$$y = 0, \quad |x| > a\colon \qquad (\sigma_y - i\tau_{xy})^{\pm} = 0; \tag{2.1}$$

$$y = 0, \quad |x| < a\colon \qquad [\sigma_y - i\tau_{xy}] = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -ix\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big). \tag{2.2}$$

Здесь x, y — оси декартовой системы координат в плоскости, перпендикулярной параллельным осям цилиндров, причем y — ось симметрии задачи (начало координат выбрано в центре площадки контакта); (u, v) — вектор перемещения; σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; $A^{\pm} = \lim\limits_{z\to x\pm i0} A$; $[A] = A^+ - A^-$; $z = x + iy$.

Согласно (2.2) на площадке контакта выполняются условия сцепления, необходимые для реализации нормального режима качения.

Используем представления Колосова — Мусхелишвили [2]

$$\begin{gathered}
\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi_j(z) \qquad (j = 1, 2),\\
\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + z\,\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)}\,,\\
2\mu_j\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \varkappa_j\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\,\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}\,.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь индексы $j = 1$ и $j = 2$ соответствуют верхней и нижней полуплоскостям; $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ — функции комплексной переменной, аналитические в соответствующих полуплоскостях; μ_j, ν_j — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответствующего материала; $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$.

С использованием двойного аналитического продолжения

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= -\overline{\Phi_1}\,(z) - z\,\overline{\Phi_1'}\,(z) - \overline{\Psi_1}\,(z) \qquad (y = \operatorname{Im} z < 0),\\
\Phi_2(z) &= -\overline{\Phi_2}\,(z) - z\,\overline{\Phi_2'}\,(z) - \overline{\Psi_2}\,(z) \qquad (y = \operatorname{Im} z > 0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

граничные условия (2.1), (2.2) можно сформулировать для краевой задачи Римана на разрезе $(-a, +a)$

$$\Phi_2^+ + m\Phi_2^- = \frac{2ix\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big) \qquad (y = 0, \quad |x| < a), \tag{2.5}$$

где

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\varkappa_2}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}, \tag{2.6}$$

причем $[\Phi_2(z)] = [\Phi_1(z)] = 0$ при $y = 0$, $|x| > a$ и

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z). \tag{2.7}$$

Результаты исследования решения краевой задачи (2.5) показывают, что при $m \neq 1$ оно не удовлетворяет фундаментальному условию непроникания (см. [1, 2]), т. е. контактная задача о сцеплении материалов на всей площадке контакта является некорректной. Это означает, что при $m \neq 1$ вблизи концов контактной площадки возникают зоны скольжения [1, 2]. Это обеспечивает выполнение условия непроникания и позволяет решить указанную проблему некорректности.

Следует отметить, что известное условие конечности напряжений не имеет физического смысла и в задачах со сцеплением, как правило, не выполняется. Необходимым является условие непроникания [1], т. е. требование, чтобы в одной и той же точке пространства не находились одновременно два материала (например, материалы штампа и основания).

Пару материалов, для которой выполняется условие $m = 1$, будем называть идеальной, так как наличие зон скольжения на контактной площадке приводит к аномальному износу материалов при качении и аномальным режимам качения: авральному и аварийному [1]. Поэтому с точки зрения приложений пара материалов, удовлетворяющая условию $m = 1$, является оптимальной. Нормальный режим качения может быть реализован только при $m = 1$.

С использованием модулей Юнга E_1 и E_2 условие $m = 1$ можно записать следующим образом:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\,\frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_2}. \tag{2.8}$$

С учетом технических возможностей управления упругими постоянными композиционных материалов условие (2.8) не является ограничением, наоборот, оно указывает, какие упругие постоянные должны быть, например, у колеса, чтобы реализовался оптимальный режим качения.

В дальнейшем ограничимся изучением качения цилиндра в случае идеальной пары цилиндр — основание, для которой может быть реализован нормальный режим качения. Авральный и аварийный режимы качения всегда сопровождаются режимом прилипания-скольжения, что приводит к скачкообразному движению [1].

При $m = 1$ решение краевой задачи (2.5) имеет следующий вид:

$$\Phi_2(z) = \frac{i\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)\big(z - \sqrt{z^2 - a^2}\,\big); \tag{2.9}$$

$$z \to \infty: \qquad \sqrt{z^2 - a^2} \to z, \quad \Phi_2(z) = iN/(2\pi z).$$

Здесь

$$a^2 = \frac{1}{\pi}\,NP\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)^{-1}, \tag{2.10}$$

$P = 1/\mu_2 + \varkappa_1/\mu_1$ — податливость упругой системы; N — абсолютная величина равнодействующей сил давления на площадке контакта.

Согласно (2.3), (2.4), (2.9) напряжения на площадке контакта определяются по формулам

$$\sigma_y = -\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \varkappa_1\mu_2}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)\sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad \tau_{xy} = 0 \qquad (y = 0, \quad |x| < a). \tag{2.11}$$

Касательные напряжения на площадке контакта появляются в момент приложения тангенциальной силы тяги T, причем на кромке площадки возникает особенность касательного напряжения.

В момент приложения данной силы к центру цилиндра радиусом R_1, когда конец вектора равнодействующей $(T, -N)$ достигает конца площадки контакта, а мгновенная ось вращения выходит на границу этой площадки, начинается качение цилиндра [1]. При этом в силу условия непроникания приложение силы тяги не приводит к изменению положения и ширины площадки контакта [1]. На основе (2.10) получаем следующий закон качения:

$$M = TR_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} N^{3/2} \sqrt{P} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1/2}, \tag{2.12}$$

т. е. коэффициент трения качения в законе Кулона равен

$$k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{NP} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1/2}. \tag{2.13}$$

Отметим два важных частных случая решения (2.12):

1. Качение цилиндра по полупространству. В этом случае $R_1 = R$, $R_2 \to \infty$ и закон качения записывается в виде

$$M = TR = \frac{1}{\sqrt{\pi}} N^{3/2} \sqrt{PR} \qquad \Big(\eta_W = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{NPR}\Big). \tag{2.14}$$

2. Качение цилиндра по поверхности цилиндрической полости в упругом пространстве. В этом случае радиус кривизны полости в уравнениях (2.11), (2.12) является отрицательным, т. е. $R_2 < 0$. Например, если радиусы близки по величине, т. е. $|R_2| = R_1(1+\Delta)$, где $\Delta \ll 1$, то закон качения упрощается:

$$M = TR_1 = N^{3/2} \sqrt{PR_1/(\pi\Delta)} \qquad (k = \sqrt{NPR_1/(\pi\Delta)}\,). \tag{2.15}$$

Формулы (2.12)–(2.15) уточняют закон качения Кулона.

3. Качение упругого тора по упругому полупространству. Рассмотрим сплошной упругий тор, поверхность которого образована в результате вращения окружности радиусом r вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее, так что центр окружности при вращении образует другую окружность радиусом $R > r$. Пусть этот тор давит на границу упругого полупространства $z < 0$ таким образом, что плоскость большого круга тора перпендикулярна границе полупространства $z = 0$. Прижимающая сила N приложена к оси тора и направлена по нормали к границе полупространства (передается на тор через спицы или диск, связывающие ось с тором). Рассмотрим соответствующую контактную задачу о давлении упругого тора на упругое полупространство, считая, что касательные напряжения на площадке контакта равны нулю.

Вблизи малой площадки контакта поверхность тора совпадает с поверхностью эллипсоидального параболоида

$$z = \frac{x^2}{2(R+r)} + \frac{y^2}{2r},$$

направления и главные радиусы кривизны которого в начальной точке контакта совпадают с направлениями и главными радиусами кривизны тора r и $R + r$. Задачу о контакте двух различных гладких упругих параболоидов решил в 1882 г. Г. Герц [3]. Согласно решению Герца малая площадка контакта в рассматриваемой задаче представляет собой внутренность эллипса на плоскости $z = 0$, являющейся плоскостью, касательной к параболоидам в точке начального контакта:

$$x^2/L^2 + y^2/a^2 = 1 \qquad (L > a). \tag{3.1}$$

Здесь $2L$ — большая ось эллипса, находящаяся на оси x; $2a$ — малая ось эллипса, находящаяся на оси y. Оси x, y совпадают с главными осями кривизны тора в начальной точке касания. При качении тора точка $(0, 0, R + r)$, являющаяся его центром, перемещается в плоскости $y = 0$ параллельно оси x. Напряжения на площадке контакта равны [3]

$$\sigma_z = -\frac{3N}{2\pi aL}\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{y^2}{a^2}}\,, \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{3.2}$$

Согласно решению Герца длины полуосей эллипса L и a, а также вертикальное перемещение тора w под действием силы N определяются уравнениями

$$(1 - e^2)\,\frac{D(e)}{B(e)} = \frac{r}{R + r}, \qquad 1 - e^2 = \frac{a^2}{L^2}; \tag{3.3}$$

$$L = \xi_L (NP)^{1/3} (R + r)^{1/3}, \qquad \xi_L = \Big(\frac{3}{2\pi}\,D(e)\Big)^{1/3}; \tag{3.4}$$

$$w = \xi_w \Big(\frac{NP}{\sqrt{R + r}}\Big)^{2/3}, \qquad \xi_w = \Big(\frac{9}{32\pi^2 D(e)}\Big)^{1/3} K(e); \tag{3.5}$$

$$P = \frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} = 2\,\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + 2\frac{1 - \nu_2^2}{E_2},$$

где e — эксцентриситет эллипса; P — упругая податливость системы; индекс 1 соответствует материалу тора, индекс 2 — материалу основания; $K(e)$, $E(e)$ — полные эллиптические интегралы:

$$K(e) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}, \qquad E(e) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$e^2 B(e) = E(e) - K(e)(1 - e^2), \qquad e^2 D(e) = K(e) - E(e).$$

Рассмотрим наиболее важный предельный случай решения (3.3)–(3.5)

$$R \gg r, \quad r \gg a, \quad R \gg L, \quad 1 - e \ll 1, \quad L \gg a. \tag{3.6}$$

В этом случае площадка контакта является сплюснутым эллипсом, а в плоскости $x = 0$ реализуется напряженное состояние, совпадающее с напряженным состоянием в контактной задаче о давлении упругого цилиндра радиусом r на упругое полупространство (см. п. **2**). В этом предельном случае формула (3.3) принимает вид

$$m^2\,\frac{\ln{(4/m)} - 1 - (1/4)m^2 \ln{(4/m)}}{1 + m^2 \ln{(4/m)} - m^2} = \frac{r}{R + r} \qquad \Big(m = \frac{a}{L}\Big). \tag{3.7}$$

При достаточно малых значениях r/R асимптотическое решение уравнения (3.7) можно записать следующим образом:

$$\frac{a}{L} = \sqrt{\frac{r}{R + r}}\,\Big(\ln\sqrt{16\,\frac{R + r}{r}} - 1\Big)^{-1} \qquad \Big(m = \frac{a}{L}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{L^2}}\,\Big). \tag{3.8}$$

В этом случае формулы (3.4), (3.5) принимают вид

$$L^3 = \frac{3}{2\pi}\,NP(R + r)\Big(\ln\frac{4}{m} - 1 - \frac{1}{4}\,m^2 \ln\frac{4}{m}\Big) \qquad \Big(m = \frac{a}{L}\Big); \tag{3.9}$$

$$w = \Big(\frac{9}{32\pi^2}\Big)^{1/3}\Big(\frac{NP}{\sqrt{R + r}}\Big)^{2/3}\,\frac{(1 - m^2)^{1/3}[(1 + m^2/4)\ln{(4/m)} - m^2/4]}{[(1 - m^2/4)\ln{(4/m)} - 1]^{1/3}}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим соответствующую контактную задачу в случае, когда на всей площадке контакта выполняются условия сцепления, необходимые для реализации нормального режима качения тора. С использованием принципа микроскопа можно показать, что для произвольной пары материалов вблизи кромки контактной площадки условие непроникания нарушается, если на всей площадке заданы условия сцепления [2]. Иными словами, для произвольной пары материалов тора и основания нормальный режим качения упругого тора по упругому основанию невозможен: вблизи кромки образуются зоны скольжения, которые приводят к возникновению аврального и аварийного режимов качения, сопровождающихся режимом прилипания-скольжения и повышенным износом материалов [1].

Из решения Герца следует, что условия сцепления на всей площадке контакта и нормальный режим качения можно реализовать только для идеальной пары материалов основания и тора, для которой выполняется условие (2.8). Для идеальной пары решением контактной задачи являются уравнения (3.2)–(3.10), причем на площадке контакта дополнительно выполняются условия сцепления

$$[u] = [v] = 0.$$

Здесь u, v — компоненты вектора перемещения вдоль осей x, y; квадратные скобки означают скачок величины при пересечении площадки контакта. Далее рассматривается только идеальная пара материалов тора и основания, для которой реализуется нормальный режим качения упругого тора по упругому основанию.

Дополнительно к силе N в направлении оси x приложим тангенциальную силу тяги T к центру тора $(0, 0, R + r)$. Наличие этой силы вызывает появление касательных напряжений на площадке контакта, сингулярных на ее кромке, но не влияет на положение и размер площадки контакта, так как любое изменение площадки при том же значении N приводит к нарушению фундаментального условия непроникания. Тангенциальная сила тяги не оказывает влияния и на состояние равновесия тора, до тех пор пока конец вектора (T, N) находится в пределах площадки контакта. В условиях равномерного качения тора конец этого вектора направлен в точку $(L, 0, 0)$ на кромке контактной площадки.

С учетом (3.4) закон качения тора с постоянной скоростью формулируется следующим образом:

$$M = T(R + r) = ((3/(2\pi))PD(e))^{1/3} N^{4/3} (R + r)^{1/3},$$

т. е. коэффициент трения качения в законе Кулона равен

$$k = ((3/(2\pi))NPD(e)(R + r))^{1/3}.$$

Здесь e определяется из уравнения (3.3).

В случае $R \gg r$ с помощью (3.9) закон качения тора можно записать в виде

$$M = T(R + r) = N^{4/3} \Big(\frac{3}{2\pi} P(R + r)\Big(\ln\frac{4}{m} - 1 - \frac{1}{4} m^2 \ln\frac{4}{m}\Big)\Big)^{1/3},$$

где m определяется формулой (3.8).

4. Качение упругого шара по упругому полупространству. Рассмотрим случай качения упругого шара радиусом R_1 по другому упругому шару радиусом R_2, причем $R_2 > R_1$. Используем решение Герца для частного случая симметричного контакта двух шаров [3]:

$$a = \Big(\frac{3}{4} PN\Big)^{1/3} \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)^{-1/3} \qquad \Big(P = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\Big); \tag{4.1}$$

$$w = \Big(\frac{9}{16} N^2 P^2\Big)^{1/3} \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)^{-1/3} \qquad (a \ll R_1). \tag{4.2}$$

Здесь a — радиус круглой площадки контакта; N — величина направленной вдоль оси симметрии задачи равнодействующей сил давления на площадке контакта; w — расстояние, на которое сближаются центры шаров после начала контакта.

В решении Герца предполагается, что касательные напряжения на площадке контакта равны нулю. В случае вырождения эллипсоидов в цилиндры при выполнении условий сцепления на площадке контакта касательные напряжения на ней обращаются в нуль при $m = 1$ (см. [1] и п. **2**). В условиях сцепления на контактной площадке проблема взаимного локального проникания материалов возникает и в задаче о контакте эллипсоидов, если $m \neq 1$. Следовательно, при $m \neq 1$ эта задача является некорректной.

Можно показать, что понятие идеальной пары материалов, для которой выполняется условие (2.8), сохраняет физический смысл и в задаче о контакте упругих эллипсоидов из различных материалов: для идеальной пары на всей площадке контакта выполняются как условия сцепления, так и условия равенства нулю касательных напряжений. Поэтому для идеальной пары материалов формулы (4.1), (4.2) можно использовать также в условиях сцепления на площадке контакта. Далее в данном пункте рассматривается только нормальный режим качения шара для идеальной пары материалов, в случае когда на всей площадке контакта выполняются условия сцепления.

Приложение тангенциальной силы тяги T к центру малого шара вызывает появление касательных напряжений на площадке контакта, но не влияет на положение и размер этой площадки вследствие выполнения условия непроникания. В тот момент, когда мгновенная ось вращения малого шара, расположенная в плоскости симметрии задачи, выйдет за пределы площадки контакта, малый шар покатится по большому. Таким образом, с использованием (4.1) получаем следующий закон равномерного качения шара:

$$M = TR_1 = N^{4/3}\Big(\frac{3}{4}\,P\Big)^{1/3}\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)^{-1/3},$$

т. е. коэффициент трения качения в законе Кулона равен

$$k = \Big(\frac{3}{4}\,NP\Big)^{1/3}\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)^{-1/3}.$$

В частном случае качения упругого шара по упругому полупространству, когда $R_1 = R$, $R_2 \to \infty$, закон качения для идеальной пары материалов принимает вид

$$M = TR = N^{4/3}(3PR/4)^{1/3},$$

причем

$$k = (3NPR/4)^{1/3}, \qquad \eta_B = (3/4)^{1/3}.$$

Очевидно, знание закона качения необходимо для расчета ускоренного движения круглых тел под действием силы тяги, превышающей равнодействующую касательных сил трения на площадке контакта T, а также замедленного движения круглых тел под действием силы инерции и силы тяги, которая в этом случае меньше равнодействующей касательных сил трения на площадке контакта. Знание нормального перемещения w круглого тела под действием силы N необходимо для расчета как ускоренных, так и замедленных движений тела в направлении действия силы N (и отскока в противоположном направлении).

5. Качение цилиндра и шара по мембране. Рассмотрим случай качения цилиндра и шара по поверхности плоской безмоментной оболочки, туго натянутой по всем направлениям усилием $\Gamma = \sigma h$ (σ — растягивающее напряжение; h — толщина оболочки), действующим в ее плоскости.

5.1. *Качение цилиндра.* Рассмотрим контакт цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ радиусом R с безмоментной пленкой (мембраной) под действием силы N, приходящейся на единицу длины цилиндра. Пусть $2a$ — ширина малой площадки контакта, причем $a \ll R$, $a = R\sin\alpha$. Сила N приложена к центру цилиндра в направлении, противоположном направлению оси y. В условиях сцепления цилиндра с пленкой на площадке контакта сила N уравновешивается силами натяжения пленки, приложенными к кромке этой площадки; в условиях скольжения она уравновешивается давлением пленки на цилиндр на площадке контакта.

На кромке контактной площадки справедливо уравнение, следующее из закона сохранения энергии [4, 5]:

$$\Gamma = \Gamma_c/(1-\cos\beta) \qquad (\beta < \alpha). \tag{5.1}$$

Здесь Γ_c — удельная энергия адгезии материалов пленки и цилиндра; β — угол между пленкой и плоскостью, касательной к цилиндру на кромке площадки контакта. Для малой площадки, когда значения α и β малы, уравнение (5.1) имеет вид

$$\beta^2 = 2\Gamma_c/\Gamma. \tag{5.2}$$

Для туго натянутой пленки $\Gamma \gg \Gamma_c$, точнее, $\Gamma\alpha^2 > 2\Gamma_c$.

Таким образом, пленка образует угол $\alpha-\beta$ с осью x (направление качения), поэтому в условиях сцепления пленки с цилиндром уравнение равновесия записывается в виде

$$N = 2\Gamma\sin(\alpha-\beta), \tag{5.3}$$

а при малых α и β — в виде

$$N = 2\Gamma(\alpha-\beta). \tag{5.4}$$

При $\Gamma_c = 0$ (когда $\beta = 0$) уравнения равновесия в условиях скольжения и сцепления совпадают.

Пусть сила тяги T (на единицу длины цилиндра) приложена к центру цилиндра в направлении оси x. Качение цилиндра начнется в тот момент, когда конец вектора $(T, -N)$ равнодействующей достигнет кромки площадки контакта. Таким образом, с помощью (5.2), (5.4) получаем закон равномерного качения цилиндра по мембране

$$M = TR = NR(N/(2\Gamma) + \sqrt{2\Gamma_c/\Gamma}\,), \tag{5.5}$$

т. е. коэффициент трения качения в законе Кулона равен

$$k = R(N/(2\Gamma) + \sqrt{2\Gamma_c/\Gamma}\,). \tag{5.6}$$

5.2. *Качение шара по мембране.* Пусть шар $x^2+y^2+z^2=R^2$ давит на мембрану с силой N, приложенной в центре шара в направлении, противоположном направлению оси z, которая является осью симметрии задачи. Малая площадка контакта образует круг радиусом a, причем $a = R\sin\alpha$. Как и в случае качения цилиндра, на границе области контакта с шаром пленка образует угол $\alpha-\beta$ с плоскостью xy (угол β определяется формулами (5.1), (5.2)). В условиях сцепления пленки и шара на площадке контакта сила N уравновешивается силами натяжения пленки, равномерно распределенными вдоль кромки. В этом случае уравнение равновесия шара на контактной площадке записывается в виде

$$N = 2\pi a\Gamma(\alpha-\beta) \qquad (\alpha > \beta). \tag{5.7}$$

Таким образом, согласно (5.2), (5.7) закон равномерного качения шара по туго натянутой мембране имеет вид

$$M = TR = NR\Big(\sqrt{\frac{N}{2\pi R\Gamma} + \frac{\Gamma_c}{2\Gamma}} + \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\Gamma}}\,\Big), \tag{5.8}$$

а коэффициент трения качения в законе Кулона равен

$$k = R\Big(\sqrt{\frac{N}{2\pi R\Gamma} + \frac{\Gamma_c}{2\Gamma}} + \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\Gamma}}\,\Big) \qquad (\Gamma \gg \Gamma_c). \tag{5.9}$$

Законы качения (5.5), (5.6) и (5.8), (5.9) являются решением проблемы Кулона в рассматриваемом случае. Эти законы необходимы для изучения динамики движения круглых тел.

Заключение. Проблема Кулона возникла в конце XVIII в., когда Ш. Кулон вывел закон качения с использованием эмпирического коэффициента трения качения. В данной работе этот коэффициент, вычисленный для случаев качения упругих цилиндров, шаров и торов по упругому полупространству, является функцией основных параметров контактирующих тел. Выведен также закон качения цилиндров и шаров по туго натянутой мембране.

Настоящая работа посвящается памяти Ю. Н. Работнова, который предоставил возможность автору в 1967–1972 гг. впервые в СССР читать в Московском государственном университете курс лекций по механике разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cherepanov G. P.** The contact problem of the theory of elasticity with stick and slip zones. The theory of rolling. Tribology // J. Appl. Math. Mech. (in print).
2. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2012.
3. **Hertz H.** Uber die Beruhrung fester elastischer Korper // Z. reine angew. Math. 1882. Bd 92. S. 156.
4. **Черепанов Г. П.** Некоторые новые приложения инвариантных интегралов механики // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 823–849.
5. **Cherepanov G. P.** Methods of fracture mechanics: solid matter physics. Dordrecht: Kluwer, 1997.

Поступила в редакцию 20/VI 2013 г.